PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4 h)

Les parties I et II sont indépendantes.

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ celui des entiers $\geqslant 1$, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, $\mathbb{R}^*$ celui des réels non nuls et $\mathbb{R}_+^*$ celui des réels > 0.

I

I - 1°/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par U_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et telle que, quel que soit $t \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$U_n(t) = u_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t^2} .$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)$ converge.

Dans la suite, on désignera par S l'application $t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I - 2°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$$

et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$R_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} U_k(t)$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx$$

converge et que, quels que soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$|R_n(t)| \leqslant |r_n| + \sum_{k=n}^{\infty} |r_{k+1}| \int_{kt}^{(k+1)t} \left| \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\right| dx .$$

I - 3°/ Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

I - 4°/ Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a

.../...

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2} \leqslant 2t + t^2$$

(on pourra, en désignant par n_0 le plus petit entier $\geqslant \frac{1}{t}$, majorer séparément $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$ et $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{\sin^2 nt}{n^2}$).

I - 5°/ Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels convergeant vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par V_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et telle que, quel que soit $t \in \mathbb{R}^*$, on ait

$$V_n(t) = v_n \frac{\sin^2 nt}{n^2 t} .$$

Montrer que, quel que soit $t \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} V_n(t)$ converge et que sa somme est continue sur $\mathbb{R}$.

II

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On désigne par E l'espace vectoriel des applications continues de I dans $\mathbb{R}$, par J l'intérieur de I (c'est-à-dire l'ensemble des points x de I tels qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $[x - \alpha, x + \alpha] \subset I$) et par E' l'espace vectoriel des applications de J dans $\mathbb{R}$. On suppose J non vide.

Pour $f \in E$, $x_0 \in J$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$, on pose

$$\Delta f(x_0, h) = \frac{1}{h^2} [f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)] .$$

Si, f et x_0 étant fixés, $\Delta f(x_0, h)$ admet une limite finie quand h tend vers 0, on désignera cette limite par $f^{(")}(x_0)$ et on dira que $f^{(")}(x_0)$ est la *pseudo-dérivée seconde* de f au point x_0 (le symbole $f''(x_0)$ désignera la dérivée seconde au sens ordinaire, si elle existe).

II - 1°/ Soient f un élément de E et x_0 un point de J tels que f admette une dérivée seconde au sens ordinaire sur un intervalle ouvert contenant x_0 et contenu dans I, celle-ci étant continue en x_0. Montrer que f admet en x_0 une pseudo-dérivée seconde et que l'on a $f^{(")}(x_0) = f''(x_0)$.

II - 2°/ Etant donné un point x_0 de J, trouver un élément f de E admettant en x_0 une pseudo-dérivée seconde et n'admettant pas en ce point de dérivée seconde au sens ordinaire.

II - 3°/ Soient f un élément de E et x_0 un point de J tels que f admette en x_0 une pseudo-dérivée seconde. Etudier le signe de $f^{(")}(x_0)$ dans le cas où f admet un maximum en x_0 et dans le cas où f admet un minimum en x_0.

II - 4°/ On désigne par E_1 le sous-ensemble de E constitué par les fonctions admettant une pseudo-dérivée seconde en tout point de J ; et, pour $f \in E_1$, on désigne par $f^{(")}$ l'application $x \mapsto f^{(")}(x)$ de J dans $\mathbb{R}$.

Montrer que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que l'application $f \mapsto f^{(")}$ de E_1 dans E' est linéaire.

.../...

Dans la suite, cette application sera désignée par d .

II - 5°/ On se propose de montrer que le noyau de d est constitué par les fonctions polynômes de degré $\leqslant 1$.

a) Vérifier que toute fonction polynôme de degré $\leqslant 1$ appartient au noyau de d .

b) Soit f un élément du noyau de d et soient a et b deux points de I tels que l'on ait $a < b$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $i \in \{1,2\}$, on désigne par $\varphi_{\varepsilon,i}$ l'application

$$x \longmapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + (-1)^i \varepsilon (x-a)(b-x)$$

de I dans $\mathbb{R}$. Calculer la pseudo-dérivée seconde de $\varphi_{\varepsilon,i}$ sur J et, à l'aide du II-3°/ , étudier le signe de $\varphi_{\varepsilon,i}$ sur $[a,b]$. Montrer alors que la restriction de f à $[a,b]$ est une fonction polynôme de degré $\leqslant 1$.

En déduire que f elle-même est une fonction polynôme de degré $\leqslant 1$.

II - 6°/ Soit A un sous-ensemble fini et non vide de J ; on posera $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$, la suite $(x_1, \ldots, x_m)$ étant strictement croissante. Soit f un élément de E admettant, en tout point de $J - A$, une pseudo-dérivée seconde nulle et tel que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, m\}$, $h\,\Delta f(x_i, h)$ tende vers 0 quand h tend vers 0 .

Montrer que f est encore une fonction polynôme de degré $\leqslant 1$.

II - 7°/ Soit f un élément de E_1 tel que $f^{(")}$ soit bornée sur J . Et soient respectivement m et M un minorant et un majorant de $f^{(")}$ sur J .

Montrer que, quels que soient $x_0 \in J$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait $[x_0 - h, x_0 + h] \subset I$, on a

$$m \leqslant \Delta f(x_0, h) \leqslant M$$

(pour cela, on pourra former la fonction polynôme P , de degré $\leqslant 2$, telle que l'on ait $P(x_0 - h) = f(x_0 - h)$, $P(x_0) = f(x_0)$ et $P(x_0 + h) = f(x_0 + h)$, puis calculer la pseudo-dérivée seconde de $f - P$ sur J et tenir compte du II-3°/).

III

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, bornées. x étant une variable réelle, on désigne par (Σ) la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) .$$

III - 1°/ Montrer que, quel que soit $x \in \mathbb{R}$, la série

$$\frac{a_0}{4} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

converge. F désignant l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associant à $x \in \mathbb{R}$ la somme de la série précédente, montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

.../...

Expliciter a_n pour $n \in \mathbb{N}$ et b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$, à partir de F. Pour cela, on calculera $\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \cos nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin nx \, dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III - 2°/ Soit x_0 un point de $\mathbb{R}$ tel que la série (Σ) converge en x_0. Montrer que F admet en x_0 une pseudo-dérivée seconde, que l'on explicitera.

III - 3°/ Montrer que, si, en tout point de $[-\pi, +\pi]$, la série (Σ) converge et a une somme nulle, a_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et b_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III - 4°/ On se propose d'établir un résultat plus fort que le précédent : étant donné un sous-ensemble fini et non vide B de $]-\pi, +\pi[$, si, en tout point de $[-\pi, +\pi] - B$, la série (Σ) converge et a une somme nulle, a_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}$ et b_n est nul pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour cela, on pourra procéder comme suit :

Montrer d'abord que, si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0, alors, quel que soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \, \Delta F(x_0, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

Etablir ensuite le résultat annoncé (on pourra utiliser la propriété suivante, dont la justification n'est pas demandée : quelle que soit la suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres entiers tendant vers $+\infty$, il existe un point ξ de $]-\pi, +\pi[- B$ tel que la suite $(\sin k_n \xi)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0).

III - 5°/ Dans cette question, on suppose que la série (Σ) converge en tout point de $\mathbb{R}$. On désigne par g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ associant à $x \in \mathbb{R}$ la somme de la série (Σ) en x. Et l'on suppose g continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, quel que soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $h \leqslant \alpha$, on ait

$$| \Delta F(x_0, h) - g(x_0) | \leqslant \varepsilon$$

(on pourra utiliser le II-7°/).

En déduire que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} | \Delta F(x, h) - g(x) | \, dx$$

tend vers 0 quand h tend vers 0.

Montrer alors que l'on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \cos nx \, dx \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(x) \sin nx \, dx \qquad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

- FIN -

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail